Remplaçant (4) et (5) dans l'égalité (3) on aura :

$x+7(7x-9)+5(5x-6)=0 \Leftrightarrow 75x-93=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{93}{75}=\frac{31}{25}$

D'où : $y=7\times\frac{31}{25}-6=-\frac{8}{25}$ et $z=5\times\frac{31}{25}-9=\frac{1}{5}$

conclusion : $\boxed{I(\frac{31}{25},-\frac{8}{25},\frac{1}{5})}$

Exercice n° 19

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}$

Or : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}=0\times(-1)-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}\neq 0$

D'où A, B, C et D sont non coplanaires

● $AB=2$; $AC=2$; $AD=2$

$BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$DC=\sqrt{0^1+2^2+0^2}=\sqrt{4}=2$

$BD=\sqrt{1^1+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

conclusion : comme A,B,C et D sont non coplanaires

et AB=AC=AD=BC=DC=BC

il résulte que ABCD est un tétraèdre regulier

● Soit h la hauteur du tétraèdre ABCD on a :

$$h=\frac{|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}=\frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{0^2+(-2\sqrt{2})^2+2^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boxed{h=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

●

$a\in[0,\sqrt{2}]$; $P_a : z=a$

a) $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P_a

* Intersection de P_a et la droite (AC)

$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AC}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq 0$

D'où (AC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point F (x_F, y_F, z_F) tels que les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x_F=-\alpha\\y_F=-1-\alpha\\z_F=-\sqrt{2}\alpha\\z_F=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{F\ (\frac{a}{\sqrt{2}},-1+\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

* Intersection de P_a et la droite (AD)

$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AD}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq 0$

D'où (AD) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sor sécants en un point G (x_G, y_G, z_G) tels que ces coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x_G=-\alpha\\y_G=1+\alpha\\z_G=-\sqrt{2}\alpha\\z_G=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{G\ (\frac{a}{\sqrt{2}},1-\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

* Intersection de P_a et la droite (BC)

$\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq 0$

D'où (BC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point I (x_I, y_I, z_I) tels que les coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite (BC) et l'équation du plan P_a donc le système :

$$\begin{cases}x_I=\alpha\\y_I=-1-\alpha\\z_I=-\sqrt{2}\alpha\\z_I=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

ce qui donne : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{I\ (-\frac{a}{\sqrt{2}},-1+\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

b) $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{IH}$

Qaraay.tn - Agra Blech - Qaraay.tn